

Correction Feuille Exercice 14

Calculer la dérivée d'une fonction en un point

Exercice 13 (Dérivabilité en un point)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \\ & f(0) = 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 := f(0)$. La fonction est continue à gauche.

On a $f(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}(e^{-\frac{1}{x}} + 1)}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{1/x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{ye^y} = 0$ par croissance comparée. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} + 1 = 1$. Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 := f(0)$. La fonction est continue à droite.

Finalement, la fonction est continue en 0.

Afin de déterminer la dérivabilité de f en 0, on s'intéresse au taux d'accroissement à savoir

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

On a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. Ainsi, f est dérivable à droite et $f'_d(0) = 0$.

On a également $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$. Ainsi, f est dérivable à gauche et $f'_g(0) = 1$.

Les valeurs des dérivées à droite et à gauche sont différentes,

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 (on a un point anguleux)

La fonction f admet deux demi tangente en 0 :

- A droite : $y = 0$
- A gauche : $y = x$

Exercice 14 (*)

On étudie la dérivabilité à droite de la fonction f définie par $\forall x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$. Le taux d'accroissement s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \\ &= \frac{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x - 1} \\ &= \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$$

Ainsi,

la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle

Exercice 15

1. On résout $x^2 - 1 > 0 \iff (x - 1)(x + 1) > 0$ Les solutions de cette inéquation sont dans l'ensemble $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

— La fonction $x \rightarrow x^2 - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} et strictement positive sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

— La fonction $X \rightarrow X^{2/3}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Donc par composée de fonctions dérivable, la fonction f est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x \times \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-1/3}.$$

2. On a

— La fonction $x \rightarrow x^3 + 5x$ est dérivable sur \mathbb{R} .

— La fonction $X \rightarrow e^X$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Donc la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (3x^2 + 5)e^{x^3 + 5x}.$$

3. On résout $x^5 - 3x^3 > 0 \iff x^3(x^2 - 3) > 0 \iff x^3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 0$. On trace un tableau de signe.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
signe de x^3	-	-	0	+	+
signe de $x^2 - 3$	+	0	-	0	+
Signe de $x^5 - 3x^3$	-	0	+	0	+

Le domaine de dérivabilité de h est alors $] -\sqrt{3}; 0[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$. On calcule,

$$\forall x \in] -\sqrt{3}; 0[\cup]\sqrt{3}; +\infty[, \quad h'(x) = \frac{5x^4 - 9x^2}{2\sqrt{x^5 - 3x^3}}$$

4. On résout à la fois, $x > 0$ et $\ln(x) = 0 \iff x = 1$. Donc la fonction k est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables. On calcule,

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, \quad k'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = -\frac{1}{x \ln^2(x)}$$

Exercice 16 (*)

1. On note $f : x \mapsto \sqrt{1 - 4x^2}$ et on résout l'inéquation

$$1 - 4x^2 \geq 0 \iff (1 - 2x)(1 + 2x) \geq 0$$

A l'aide d'un tableau de signe, on voit que les solutions de cette inéquation sont dans l'ensemble $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. On a donc :

— La fonction $x \rightarrow 1 - 4x^2$ est continue sur \mathbb{R} et positive sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

— La fonction $X \rightarrow \sqrt{X}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

La fonction f est donc continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ en tant que composée de fonctions continues.

Cependant, la fonction $x \rightarrow 1 - 4x^2$ est strictement positive sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ et la fonction $X \rightarrow \sqrt{X}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Donc la fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$. De plus

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[, f'(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{1 - 4x^2}}$$

2. On note $g : x \rightarrow x|x|$.

— La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur \mathbb{R} .

— La fonction $x \rightarrow x$ est continue sur \mathbb{R} .

La fonction g est donc continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions continues.

De même,

— La fonction $x \rightarrow |x|$ est dérivable sur \mathbb{R}^* .

— La fonction $x \rightarrow x$ est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction g est donc dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables. Or, pour $x \in \mathbb{R}_-$, $g(x) = -x^2$ donc

$$\forall x \in] -\infty; 0[, \quad g'(x) = -2x$$

De même, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g'(x) = 2x$. On regarde maintenant si la fonction g est dérivable en 0. Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

On a alors

$$g'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

☞ **Remarque :** On pourra noter que la fonction g' est également continue et que donc la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 .

3. On note $h : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x^3)}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On sait que

- La fonction $x \rightarrow 1+x^3$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, elle est strictement positive sur cet intervalle.
- La fonction $X \rightarrow \ln(X)$ est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction $x \rightarrow 3x^2$ est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Donc, par composée et quotient de fonctions continues et dérivables,

la fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

On calcule alors :

$$h'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3} \times 3x^2 - 6x \ln(1+x^3) \\ = \frac{9x^4 - 6x(1+x^3)\ln(1+x^3)}{9x^4} = \frac{1}{1+x^3} - \frac{2}{3} \times \frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$$

On étudie la dérivabilité de h en 0. On calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^3)}{3x^3}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ car on reconnaît un taux d'accroissement.

La fonction h est dérivable (et donc continue) en 0 et $h'(0) = \frac{1}{3}$.

🌀 **Remarque :** Encore une fois, on peut vérifier que la dérivée est continue en 0 et que la fonction h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; +\infty[$.

Exercice 17 (**)

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R}^{+*} par $h(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

La fonction h n'est pas définie en 0. Elle n'est donc ni continue, ni dérivable en 0.

Regardons si elle est prolongeable par continuité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

La fonction h est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.

Regardons maintenant si ce prolongement est dérivable à droite en 0. On regarde le taux d'accroissement

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{1}{\ln(x)}$$

On remarque que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = 0$. Donc

le prolongement de la fonction h est dérivable à droite en 0.

Étude de fonctions, interprétation graphique.

Exercice 18 (* - EML 1994)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$$

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* ,

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f'(x) &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}e^{-x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x}e^{-x} - 2\sqrt{x}e^{-x} \\ &= \left(\frac{1}{x} - 2\right)\sqrt{x}e^{-x} \end{aligned}$$

Or pour tout $x > 0$, $\sqrt{x}e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\left(\frac{1}{x} - 2\right)$. On résout donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - 2 \geq 0 &\iff \frac{1}{x} \geq 2 \\ &\iff x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On calcule alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La dernière limite étant obtenue par croissance comparée, en effet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x}$$

On en déduit le tableau de variation

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

2. On calcule

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{2\sqrt{x}e^{-x}}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{2e^{-x}}{\sqrt{x}} = +\infty \end{aligned}$$

La fonction n'est donc pas dérivable à droite en 0. La courbe représentative de la fonction f admet alors une tangente verticale au point $x = 0$.

3. Tracer la courbe représentative de f

Exercice 19 ()**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 \neq 0$ donc

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2. La fonction $x \rightarrow e^x + 1$ est de classe \mathcal{C}^1 et ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
La fonction $x \rightarrow e^x - 1$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Donc la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonction dérivable.

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

3. On a

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

En utilisant cette forme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Enfin, la fonction $f'(x)$ est strictement positive donc la fonction f est strictement croissante. On trace les variations de la fonction f .

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	-1	1

4. La fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonction dérivable. On calcule alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2e^x(e^x + 1)^2 - 2e^x \times 2e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{2e^x(e^{2x} + 2e^x + 1) - 4e^{2x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{2e^{3x} + 4e^{2x} + 2e^x - 4e^{3x} - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{-2e^{3x} + 2e^x}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{-2e^x(e^{2x} - 1)}{(e^x + 1)^4} \end{aligned}$$

Le signe de f'' est donnée par l'expression $e^{2x} - 1$. Or

$$e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0$$

La dérivée seconde de f est donc positive sur $] -\infty; 0[$ et négative sur $]0; +\infty[$. La dérivée de la fonction f change donc de sens de variation au point $x = 0$.

Le point $x = 0$ est un point d'inflexion de f .

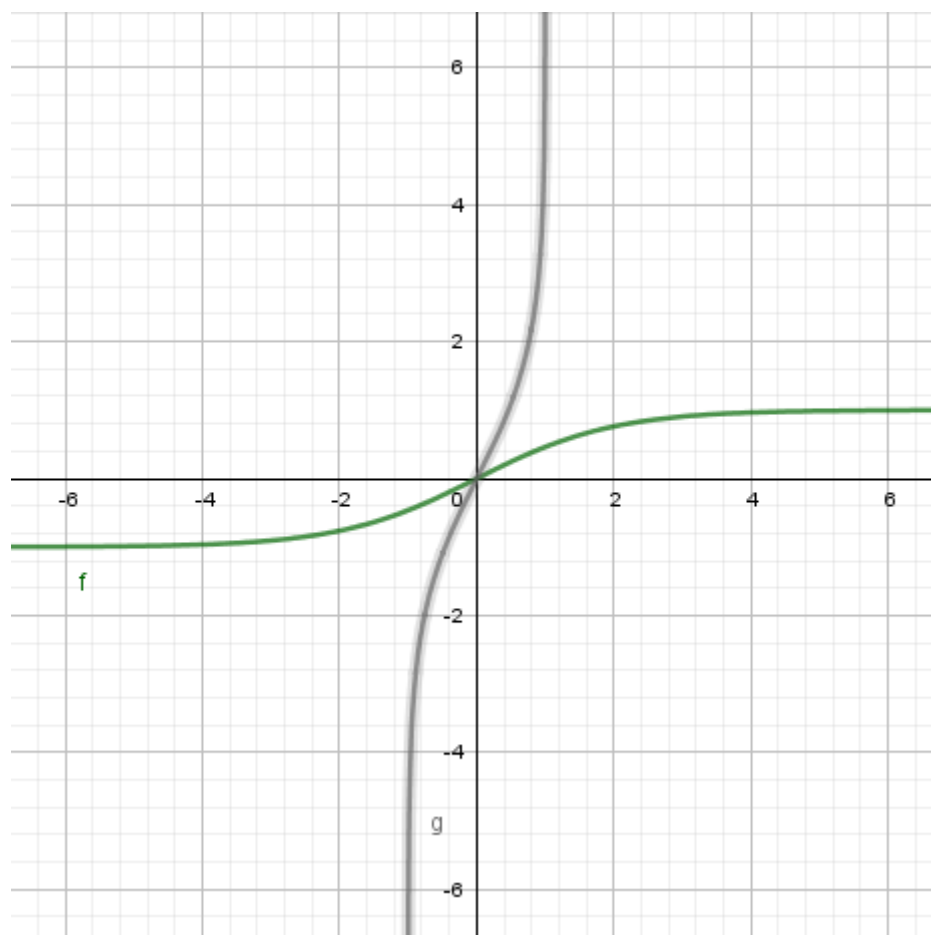
5. L'équation de la tangente à f en 0 est donnée par la formule :

$$y = f(0) + x f'(0)$$

c'est à dire

$$y = \frac{1}{2}x$$

6. Le graphique est le suivant



Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 20

On pose la fonction $f : x \rightarrow e^x$. Cette fonction est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall y \in [0, 1], \quad f'(y) = e^y$$

On a donc $\forall y \in [0, 1], |f'(y)| \leq e$. D'après l'inégalité des accroissements finis (en choisissant dans le théorème $a = 0$ et $b = x \in [0, 1]$), on a

$$\forall x \in [0, 1], |e^x - e^0| \leq e(x - 0)$$

c'est à dire

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], |e^x - 1| \leq ex.}$$

Exercice 21 (*)

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} = f(u_n)$.

1. On peut montrer ce résultat soit en utilisant des inégalités, soit en étudiant la fonction f .

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\iff 2 \leq x + 2 \leq 4 \\ &\iff 0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{x + 2} \leq \sqrt{4} \\ &\iff 0 \leq f(x) \leq 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0; 2] \text{ on a } f(x) \in [0; 2] \text{ (} f \text{ est stable par } [0, 2])}$$

- On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, 2]\}$ pour tout n entier.
 - **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $u_0 \in [0, 2]$. Or d'après l'énoncé, $u_0 = 0$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.
 - **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n .
 $u_n \in [0, 2]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 2]$. \mathcal{P}_{n+1} est vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.
 - **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2].}$
2. La fonction f est dérivable sur $[0, 2]$ en tant que composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in [0, 2], \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

On a alors

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\iff 2 \leq x + 2 \leq 4 \\ &\iff \sqrt{2} \leq \sqrt{x + 2} \leq \sqrt{4} \\ &\iff 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{x + 2} \leq 4 \\ &\iff \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \geq f'(x) \geq \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{2} \\ &\iff |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0; 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.}$$

3. On sait que
- f est dérivable sur $[0, 2]$
 - $\forall x \in [0, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - $2 \in [0, 2]$ et $u_n \in [0, 2]$.

D'après le théorème des accroissements finis

$$|f(u_n) - f(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$$

Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = 2$, on a

$$\boxed{|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|.}$$

4. On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2| \right\}$ pour tout n entier.
- **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $|u_0 - 2| \leq |u_0 - 2|$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n .

On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 2| &\leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2| \\ \iff |u_{n+1} - 2| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 2| \end{aligned}$$

\mathcal{P}_{n+1} est vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. D'après le théorème des gendarmes,

$$(u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Exercice 22 (**)

1. On pose $f : x \rightarrow \ln(x)$. Cette fonction est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{x}$. On a pour tout entier $k \geq 1$:

— f est dérivable sur $[k, k+1]$

— Pour tout $x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{k}$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\frac{k+1-k}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{k+1-k}{k}$$

$$\text{Pour tout entier } k \geq 1 \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

2. On a pour n entier :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ \implies \ln(n+1) - \ln(1) &\leq u_n \end{aligned}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

$$\text{Par comparaison, } u_n \text{ diverge car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

3. Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour $n \geq 1$ par la relation $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$

(a) En reprenant l'inégalité précédente,

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \implies \ln(n+1) - \ln(n) \leq v_n$$

$$\text{On a bien } v_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$$

(b) On regarde le signe de $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0 \end{aligned}$$

(d'après l'inégalité montrée à la question 1). La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par 0. La suite (v_n) est donc convergente. La limite de $(v_n)_n$ est appelée la constante d'Euler.

Exercice 23 ()**

On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi que la valeur approchée d'une des racines.

1. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \rightarrow x^3 - 3x + 1$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} (c'est un polynôme) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

On trace son tableau de variation

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

On a alors :

- La fonction f est continue sur $] -\infty; -1[$.
 - La fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; -1[$.
 - $f(] -\infty; -1[) =] -\infty; 3[$ et $0 \in] -\infty; 3[$.
- D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $\alpha < -1$ tel que $f(\alpha) = 0$.

De la même façon,

- La fonction f est continue sur $] -1; 1[$.
 - La fonction f est strictement décroissante sur $] -1; 1[$.
 - $f(] -1; 1[) =] -1; 3[$ et $0 \in] -1; 3[$.
- D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $-1 < \beta < 1$ tel que $f(\beta) = 0$.

- La fonction f est continue sur $]1; +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
- $f(]1; +\infty[) =] -1; +\infty[$ et $0 \in] -1; +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $1 < \gamma$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Ainsi, l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet 3 solutions α, β, γ vérifiant $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.

2. On veut obtenir une approximation de β . On introduit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

- (a) On a $f(0) = 1$ et $f(1/2) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8}$. Ainsi, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$\beta \in [0, 1/2].$

Enfin,

$g(x) = x \iff x^3 + 1 = 3x \iff f(x) = 0$

- (b) La fonction g est dérivable sur $[0, 1/2]$ et

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad g'(x) = x^2 \geq 0$$

La fonction g est croissante et $g(0) = \frac{1}{3}$ et $g(1/2) = \frac{3}{8}$ donc $g([0, 1/2]) = [1/3, 3/8] \subset [0, 1/2]$.

L'ensemble $[0, 1/2]$ est stable par g .

De plus $\forall x \in [0, 1/2], x^2 \in [0, 1/4]$, et donc

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

(c) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, 1/2]\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $u_n \in [0, 1/2]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1/2]$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1/2].}$

(d) On sait que

— La fonction f est dérivable sur $[0, 1/2]$

— Pour tout $x \in [0, 1/2], |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1/2]$ et $\beta \in [0, 1/2]$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$$

On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \right\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0, \beta \in [0, 1/2]$ donc $|u_0 - \beta| \leq \frac{1}{2}$ et la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \beta| &\leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \\ &\leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}.}$

(e) On résout l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} &\leq 10^{-9} \\ \iff \frac{1}{4^n} &\leq 2 \times 10^{-9} \\ \iff 4^n &\geq \frac{10^9}{2} \\ \iff n \ln(4) &\geq \ln\left(\frac{10^9}{2}\right) \\ \iff n &\geq \frac{\ln\left(\frac{10^9}{2}\right)}{\ln(4)} \end{aligned}$$

On a la relation $|u_n - \beta| \leq 10^{-9}$ pour

$$n = E \left(\frac{\ln \left(\frac{10^9}{2} \right)}{\ln(4)} \right) + 1$$

où E représente la fonction partie entière.

(f) Programme Scilab :

```
function y = g(x)
    y = (x^3 + 1)/3
endfunction
```

```
n = floor(log(2 * 10^(-9)) / (-log(4))) + 1
u = 0
for k=1:n
    u = g(u)
end
```

```
disp('La solution obtenue par la méthode de l''exercice est x = ' + string(u)
+ '. On a obtenue cette solution pour n = ' + string(n) + '.')
```

Manipuler les développements limités d'ordre 1.

Exercice 24 ()

On peut appliquer la formule du développement limité en calculant

$$f'(x) = -e^{1-x}$$

et


$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -1$$

On obtient alors le développement limité à l'ordre 1 de f ,

$$f(x) = 1 - 1(x - 1) + (x - 1)\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 1$ est alors

$$y = -x + 2.$$

 **Remarque :** On peut composer les DL.

En effet, on sait que $\lim_{x \rightarrow 1} 1 - x = 0$ et on connaît (par cœur) le DL de e^X en 0 :

$$e^X = 1 + X + X\varepsilon(X), \quad \text{avec} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon(X) = 0$$

Donc en prenant $X = 1 - x$,

$$e^{1-x} = 1 + (1 - x) + (1 - x)\varepsilon(1 - x), \quad \text{avec} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon(X) = 0$$

Exercice 25 (*)

On considère la fonction $f : x \rightarrow \frac{\ln(2 - \sqrt{1+x})}{x}$.

1. On connaît le développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

Donc

$$2 - \sqrt{1+x} = 1 - \frac{1}{2}x - x\varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

et finalement

$$\ln(2 - \sqrt{1+x}) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}x - x\varepsilon_1(x)\right)$$

On voit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x + x\varepsilon_1(x) = 0$ et on connaît le DL de $\ln(1+X)$ en 0 :

$$\ln(1+X) = X + X\varepsilon_2(X), \quad \text{avec} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon_2(X) = 0$$

En prenant $X = -\frac{1}{2}x - x\varepsilon_1(x)$, on obtient donc

$$\ln(2 - \sqrt{1+x}) = -\frac{1}{2}x - x\varepsilon_1(x) + \left(-\frac{1}{2}x - x\varepsilon_1(x)\right)\varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}x - x\varepsilon_1(x)\right)$$

En posant $\varepsilon_3(x) = -\varepsilon_1(x) + \left(-\frac{1}{2} - \varepsilon_1(x)\right)\varepsilon_2\left(-\frac{1}{2}x - x\varepsilon_1(x)\right)$, on s'aperçoit que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$ et que

$$\boxed{\ln(2 - \sqrt{1+x}) = -\frac{1}{2}x + x\varepsilon_3(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0}$$

Ceci est le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction $x \rightarrow \ln(2 - \sqrt{1+x})$.

2. On calcule

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \sqrt{1+x})}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x + x\varepsilon_3(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} + \varepsilon_3(x) \\ &= \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 26 ()**

Soit f une fonction dérivable en a . Le but de l'exercice est de déterminer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h}$$

1. On considère la fonction $h : x \rightarrow f(a+x)$. On calcule

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{f(a+x) - f(a)}{x}$$

La fonction f est dérivable en a et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} = f'(a)$$

Par conséquent,

$$\boxed{h \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } h'(0) = f'(a)}$$

2. Le développement limité à l'ordre 1 de la fonction h en 0 est

$$\boxed{h(x) = h(0) + h'(0)(x - 0) + x\varepsilon(x) = f(a) + f'(a)x + x\varepsilon(x)}$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

3. On a

$$\boxed{(f(a+x))^2 = (h(x))^2 = (f(a) + f'(a)x + x\varepsilon(x))^2}$$

4. On calcule,

$$\begin{aligned} (f(a+x))^2 &= (f(a) + f'(a)x + x\varepsilon(x))^2 \\ &= (f(a))^2 + 2xf(a)f'(a) + 2xf(a)\varepsilon(x) + (f'(a))^2x^2 + 2f'(a)x^2\varepsilon(x) + x^2(\varepsilon(x))^2 \\ &= (f(a))^2 + 2xf(a)f'(a) + x\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_2(x) = 2f(a)\varepsilon(x) + (f'(a))^2x + 2f'(a)x\varepsilon(x) + x(\varepsilon(x))^2.$$

On a bien $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$. On a alors

$$(f(a+3h))^2 = (f(a))^2 + 6hf(a)f'(a) + 3h\varepsilon_2(3h)$$

et

$$(f(a-h))^2 = (f(a))^2 - hf(a)f'(a) - h\varepsilon_2((-h))$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2 &= (f(a))^2 + 6hf(a)f'(a) + 3h\varepsilon_2(3h) - ((f(a))^2 - hf(a)f'(a) - h\varepsilon_2((-h))) \\ &= 7hf(a)f'(a) + h\varepsilon_3(h) \end{aligned}$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0$. Finalement,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7hf(a)f'(a) + h\varepsilon_3(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 7f(a)f'(a) + \varepsilon_3(h) \\ &= \boxed{7f(a)f'(a)} \end{aligned}$$